3/11/2020

Ορισμός: Όριο πραγματικής συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \}$) στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U [$\Leftrightarrow$ $\bar{x}_0 \in U'$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$]

Πρόταση

Ονομάζουμε ένα $l \in \mathbb{R}$ όριο της f στο $\bar{x}_0$ (και λέμε ισοδύναμα: η f συγκλίνει στο (προς το) $l \in \mathbb{R}$, όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο (προς το) $\bar{x}_0$ ή f έχει στο $\bar{x}_0$ το όριο $l \in \mathbb{R}$] αν $\forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\underbrace{\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0}_{\text{στο } \mathbb{R}^n}$: $\underbrace{f(\bar{x}_\nu) \to l}_{\text{στο } \mathbb{R}}$

Συμβολισμοί: α) $f(\bar{x}) \to l$, όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$

β) $f(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{x}_0]{} l$

Άσκηση

γ) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ [αποδεικνύεται (βλ. πρόταση 2.2.2/Σημ.) ότι αν η f έχει στο $\bar{x}_0$ όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό]

Ισοδυναμία ακολουθιακού ορισμού με ε-δορισμό

Πρόταση 2.2.1 / Σημ: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x_0}) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x_0}, \delta) \setminus \{\bar{x_0}\}$

$: |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$

Αποδ: [ΑΣΚΗΣΗ]

Παρατήρηση: [2.2.1(α)]: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = \ell \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} |f(\bar{x}) - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} (f(\bar{x}) - \ell) = 0$

Άσκηση: (Αποδ.: προηγούμενη πρότ. 2.2.1)

Παρατήρηση: [2.2.1(β)] Αν $\bar{x_0} \in U$ είναι εσωτερικό σημείο [$\Rightarrow \bar{x_0}$ είναι σημείο συσσώρευσης του U], τότε $\exists \delta_0 > 0 : B(\bar{x_0}, \delta_0) \subset U$

Επίσης, $\forall \delta > 0$: $\underbrace{\bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta)}$ $\Leftrightarrow \|\underbrace{\bar{x} - \bar{x_0}}_{=:\bar{u}}\| < \delta \Leftrightarrow \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta)$

$\boxed{\bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta) \setminus \{\bar{x_0}\} \Leftrightarrow 0 < \|\underbrace{\bar{x} - \bar{x_0}}_{=:\bar{u}}\| < \delta}$

Με αυτά έχουμε:

$\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0)$ $(*)$

$\forall \bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta) \setminus \{\bar{x_0}\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$

πρότ. (2.2.1 / Σημ.) Άσκηση

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0) \ \forall \underbrace{\bar{u}}_{= \bar{x} - \bar{x_0}} \in B(\bar{0}, \delta) \setminus \{\bar{0}\}$:

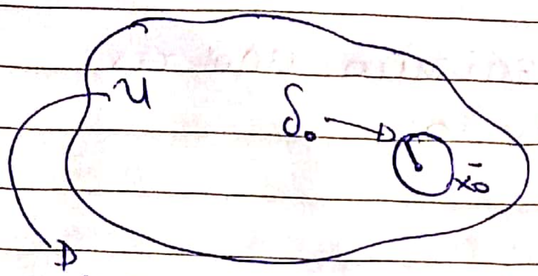
$: |f(\bar{x_0} + \bar{u}) - \ell| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{\underbrace{\bar{u}}_{= \bar{x} - \bar{x_0} \in U - \bar{x_0}} \to \bar{0}} f(\bar{x_0} + \bar{u}) = \ell$

Νέα συνάρτηση $= f(\bar{x_0} + \bar{u}) : U - \bar{x_0} \to \mathbb{R}$

όπου $U - \bar{x_0} := \{\bar{x} - \bar{x_0} : \bar{x} \in U\}$

(*) Αυτό αναφέρεται για να είμαστε σίγουροι ότι το $f(\bar x)$ ορίζεται. (βλ. σχήμα)



Πεδίο ορισμού της f

Συνδυασμός των 2 προηγούμενων παρατηρήσεων:

$$\lim_{\bar x\to\bar x_0} f(\bar x)=\ell \iff \lim_{\bar u\to\bar 0}|f(\bar x_0+\bar u)-\ell| = 0 \iff$$

$\iff \forall\ (\bar u_\nu) \subset U\setminus\{\bar x_0\}-\bar x_0$ με $\bar u_\nu\to\bar 0$: $|f(\bar x_0+\bar u_\nu)-\ell|\to 0$

$\iff \bar x_0+\bar u_\nu \in U\setminus\{\bar x_0\}$

[$\bar u_\nu \to \bar 0 \iff \|\bar u_\nu\|\to 0$ και αντίστοιχα για το $f(\bar x_0+\bar u_\nu)-\ell$, και γενικώς είναι πρακτικό για να έχω όρια που συγκλίνουν στο 0]

Υπενθύμιση: $\bar x_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} \bar x_0 \in \mathbb{R}$

$\bar x_\nu = (x_\nu^{(1)},\dots,x_\nu^{(n)}) \in U \subset \mathbb{R}^n$, $\quad \bar x_0 = (x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n)})$

[$x_\nu^{(i)},\ x_0^{(i)} \in \mathbb{R},\ \forall i=1,\dots,n$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$]

$$\overset{\text{Ορ.}}{\iff} \|\bar x_\nu-\bar x_0\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

$$\iff \begin{cases} x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)} \\ \forall i=1,\dots,n\end{cases} \quad \left[\iff |x_\nu^{(i)}-x_0^{(i)}| \xrightarrow{\nu\to\infty} 0\ (=:a)\right]$$

$$\iff x_\nu^{(i)}-x_0^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0\ (=a)$$

Άσκηση [Το "$\iff$" ισχύει μόνο για $a=0$]

Ιδιότητες ορίων πραγματικών συναρτήσεων

Θεώρημα 2.2.1 + Πόρισμα 2.2.1 Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ

[π.χ. Θ. 2.2.1(α): Έχω τι έχω (επίσημα: υπό τις αναφερόμενες προϋποθέσεις) Ν.δ.ο.:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(f+g)(\bar{x}) = \ell + m$$

Αν.δ.ο. $\forall (\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$:

: $\underbrace{(f+g)(\bar{x}_\nu)}_{=f(\bar{x}_\nu)+g(\bar{x}_\nu)} \to \ell+m$

Έχω: $f(\bar{x}_\nu)\to\ell$ και $g(\bar{x}_\nu)\to m$

Συνεπώς (όριο αθροίσματος συγκλινουσών ακολουθιών, βλ. σχετική πρόταση Ενότητας 1.4):

$f(\bar{x}_\nu)+g(\bar{x}_\nu)\to \ell+m$]

Ειδικότερα: [Θ. 2.2.1 (ε)]

Έστω $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=\ell$ και έστω $h: V\to\mathbb{R}$, $f(U)\subset V\subset\mathbb{R}$ συνεχής στο $\ell\in\mathbb{R}$

[$\Leftrightarrow$ $\forall (y_\nu)\subset V$ με $y_\nu\to\ell$: $h(y_\nu)\to h(\ell)$]

Τότε:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \underbrace{(h\circ f)(\bar{x})}_{:=h(f(\bar{x}))} = h(\ell)$$

Αποδ.

$\boxed{\forall (\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\} \text{ με } \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0}$: $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{=:y_\nu\in f(U)\subset V}\to\ell$

$\Rightarrow \underbrace{h(y_\nu)}_{=h(f(\bar{x}_\nu))=(h\circ f)(\bar{x}_\nu)}\to h(\ell)$

(SOS)

Παραδείγματα ορίων πραγματικών συναρτήσεων

Οι προβολές της ταυτοτικής διανυσματικής συνάρτησης (ταυτοτικού διανυσματικού πεδίου)

$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{pmatrix}$

$f_i(\bar{x}) = x_i$, $i = 1, \dots, n$

είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις (σ' όλο το π.ο. τους $\mathbb{R}^n$)

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(\bar{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Πράγματι, $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \underbrace{f_i(\bar{x})}_{= x_i} = \underbrace{x_0^{(i)}}_{= f_i(\bar{x}_0)}$ όπου: $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$

Πιο απλός συμβολισμός: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f_i(\bar{x}) = \underbrace{a_i}_{= f_i(\bar{a})}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$]

Θνδο: $\forall (\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ με $\underbrace{\bar{x}_\nu \to \bar{a}}_{(\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n:\ x_\nu^{(i)} \to a^{(i)})}$: $\underbrace{f_i(\bar{x}_\nu)}_{= x_\nu^{(i)}} \to a_i$

[Εναλλακτική απόδειξη: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} x_i = a_i$. Πράγματι:

$|x_i - a_i| \leq \|\bar{x} - \bar{a}\|$. Συνεπώς $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta (= \varepsilon) > 0$

$\forall x \in B(\bar{a}, \delta) : |x_i - a_i| < \varepsilon$]

Ορισμός συνέχειας πραγματικής συνάρτησης

Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$, αν $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$
[$\Rightarrow$ σε μεμονωμένα σημείο $\bar{x}_0 \in U$ κάθε f είναι συνεχής]

Συνεχής στο $A \subset U$, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\bar{x}_0 \in A$

[ΠΡΟΣΟΧΗ: Για να ελέγξουμε σε κάθε (τυχαίο, αλλά σταθερό) $\bar{x}_0 \in A$ αν η f είναι συνεχής στο $\bar{x}_0$ ΘΕΩΡΟΥΜΕ (ΚΟΙΤΑΜΕ) ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΤΟ U]

Συνεχής (απλά), αν η f είναι συνεχής στο U
[Αν το $A \subset U$ δεν είναι ανοικτό σύνολο (του $\mathbb{R}^n$) τότε μπορεί ο περιορισμός $f|_A : A \to \mathbb{R}$
$f|_A(\bar{x}) = f(\bar{x})$,
να είναι συνεχής, ενώ η $f: U \to \mathbb{R}$ να μην είναι συνεχής στο A. Παράδειγμα (τετριμμένο):]
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

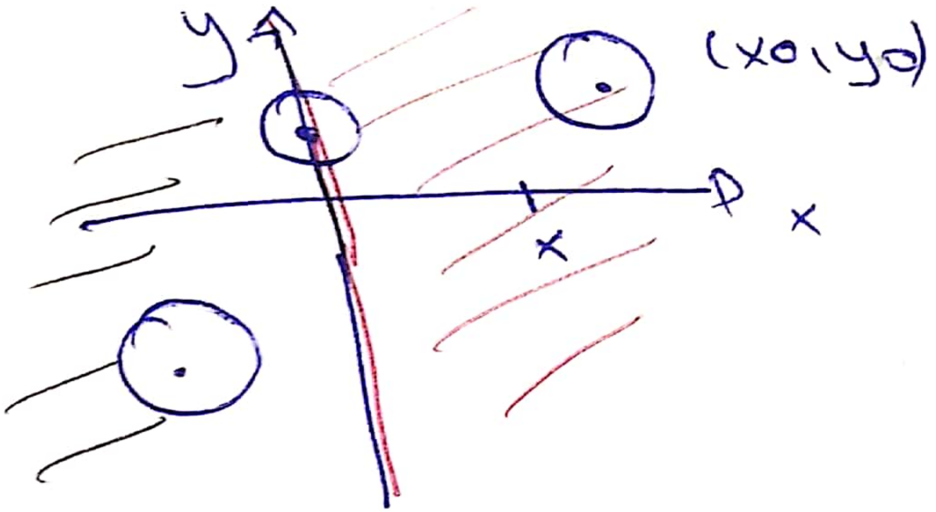
[ΑΣΚΗΣΗ: Γιατί αυτό δεν μπορεί να συμβεί, αν το $A \subset U$ είναι ανοικτό ?]

Ισχυρισμός: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} =$
$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$: Πράγματι, έστω (x_0, y_0) με $x_0 > 0$. Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0 : B((x_0,y_0), \varepsilon_0) \subset \{x > 0\}$

Συνεπώς $\forall (x_\nu, y_\nu) \subset \mathbb{R}^2$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ ισχύει:
$\exists \nu_0 \; \forall \nu \geq \nu_0 : (x_\nu, y_\nu) \in B((x_0,y_0), \varepsilon_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \nu \geq \nu_0 : f(x_\nu, y_\nu) = 1 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 1 = f(x_0, y_0)$

Συνεπώς f συνεχής στο (x_0, y_0):

(Ανάλογα (A ανοιχ): f συνεχής στο $\{x_0\}$



Συνέχεια...

Δείξαμε (+ Άσκηση) ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$ (δηλ. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $x_0 \neq 0$)
Μήπως είναι συνεχής και σε σημεία $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ με $x_0 = 0$???? [Με άλλα λόγια: Βρήκαμε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής???]

Απάντηση: όχι, σε σημεία $(0, y_0)$ η f δεν είναι συνεχής [και μάλιστα δεν έχει όριο]: Πράγματι η ακολουθία $f(0, y_0) = 1$
$\left(-\frac{1}{\nu}, y_0\right)$ $(\in //)$ $\xrightarrow[\nu \to \infty]{} (0, y_0)$ με $f\left(-\frac{1}{\nu}, y_0\right) = 0 \to 0 \neq$

Άρα εδώ βρήκαμε μία (έχει κι άλλες) ακολουθία $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ με $f(x_\nu, y_\nu) \not\to f(x_0, y_0)$.

[Πιο συγκεκριμένα: $f(x_\nu, y_\nu) = 0 \to 0 \neq 1 = f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ δεν ισχύει: $\forall (x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$: $f(x_\nu, y_\nu) \to f(x_0, y_0)$
δηλ. δεν ισχύει: η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0)

[$\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0, y_0)} f(x,y)$ αφού $\left(-\frac{1}{\nu}, y_0\right) \to (0, y_0)$

και $f\left(-\frac{1}{\nu}, y_0\right) = 0 \to 0$ $\neq$

ενώ $\left(\frac{1}{\nu}, y_0\right) \to (0, y_0)$ και $f\left(\frac{1}{\nu}, y_0\right) = 1 \to 1$

Συνεπώς, το όριο $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει

αφού αν υπήρχε ως $\ell \in \mathbb{R}$, θα έπρεπε να είναι το ίδιο

$\forall (x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$: $f(x_\nu, y_\nu) \to \ell$

(ενώ εδώ βρήκαμε μια $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$ με $f(x_\nu, y_\nu) = 0 \to 0$ και μια άλλη $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to (x_0, y_0)$ με $f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) = 1 \to 1$

δεν είναι το ίδιο

Προσοχή, όμως αν θεωρήσουμε τον περιορισμό $f|_A$ της f στο $\mathbb{R} \times [0, \infty) = A$ (κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) τότε έχουμε $f|_A : A \to \mathbb{R}$, $f|_A(x,y) = 1$ και συνεπώς η $f|_A$ είναι συνεχής $\forall (x,y) \in A$ ως σταθερή σε όλο το ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ (από αυτό παίρνω ακολουθίες για να ελέγξω τη συνέχεια)

Η $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στα σημεία $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, ως σταθερή ??? ;

Παράρτημα: Σε περίπτωση που το $x_0 \in U$ είναι σ.σ. του U ισχύει:

f συνεχής στο $\bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων:

Θεώρημα 2.2.3 + πόρισμα 2.2.2

[Απόδειξη: για $\bar{x}_0$ σ.σ. (π.χ. εσωτερικό σημείο)

Παράδειγμα: Αφού όπως είδαμε οι προβολές $f_i(\bar{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, είναι συνεχείς (εννοείται σ' όλο το πεδίο ορισμού τους $\mathbb{R}^n$) από το Θ. 2.2.1 προκύπτει ότι γινόμενα, αθροίσματα, πηλίκα (όπου ορίζονται) ⟹ πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις (όπου ορίζονται) είναι συνεχείς.

Ειδικότερα κάθε σταθερή συνάρτηση (ΣΕ ΟΛΟ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ) είναι συνεχής:

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ με $f(\bar{x}) = c \in \mathbb{R}$ $\forall \bar{x} \in U$. Τότε ισχύει: $f(\bar{x}_\nu) = c \to c = f(x_0) \in U$ $\forall (\bar{x}_\nu) \in U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

Απόδ. ισοδυναμίας σελ. 18 (Παρατήρηση 2.2.4 / Σημ.):

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in U$ σ.σ. του U. Τότε f συνεχής στο $\bar{x}_0$ ⟺ $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$ ⟹ ⟹ $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$ $\overset{ορ.}{⟺}$ $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$ ⟺ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$: $|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$ ⟹ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta)$: $|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$ ⟹ f συνεχής στο $\bar{x}_0$ [(*) (απόδειξη παρόμοια (ανάλογη όχι ακριβώς ίδια) με το ⟸ στην απόδ. της πρότ. 2.2.1 / Σημ.): Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta > 0$: $\forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta)$: $|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$. Από την άλλη (αφού $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$) $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ $\forall \nu \geq \nu_0$: $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta)$ ⟹ $\forall \nu \geq \nu_0$: $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta) \cap U$ (αφού $\bar{x}_\nu \subset U$). Συνεπώς $\forall \nu \geq \nu_0$: $|f(\bar{x}_\nu) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$. Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$ ορ.

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, έχουμε f: συνεχής στο $\bar{x}_0$ (ορ.)]